

9033

III

Bibl. Jag.

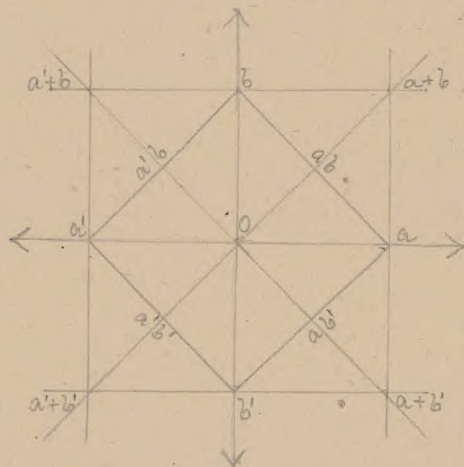


O kategoryalnej geometrii algebraicznej

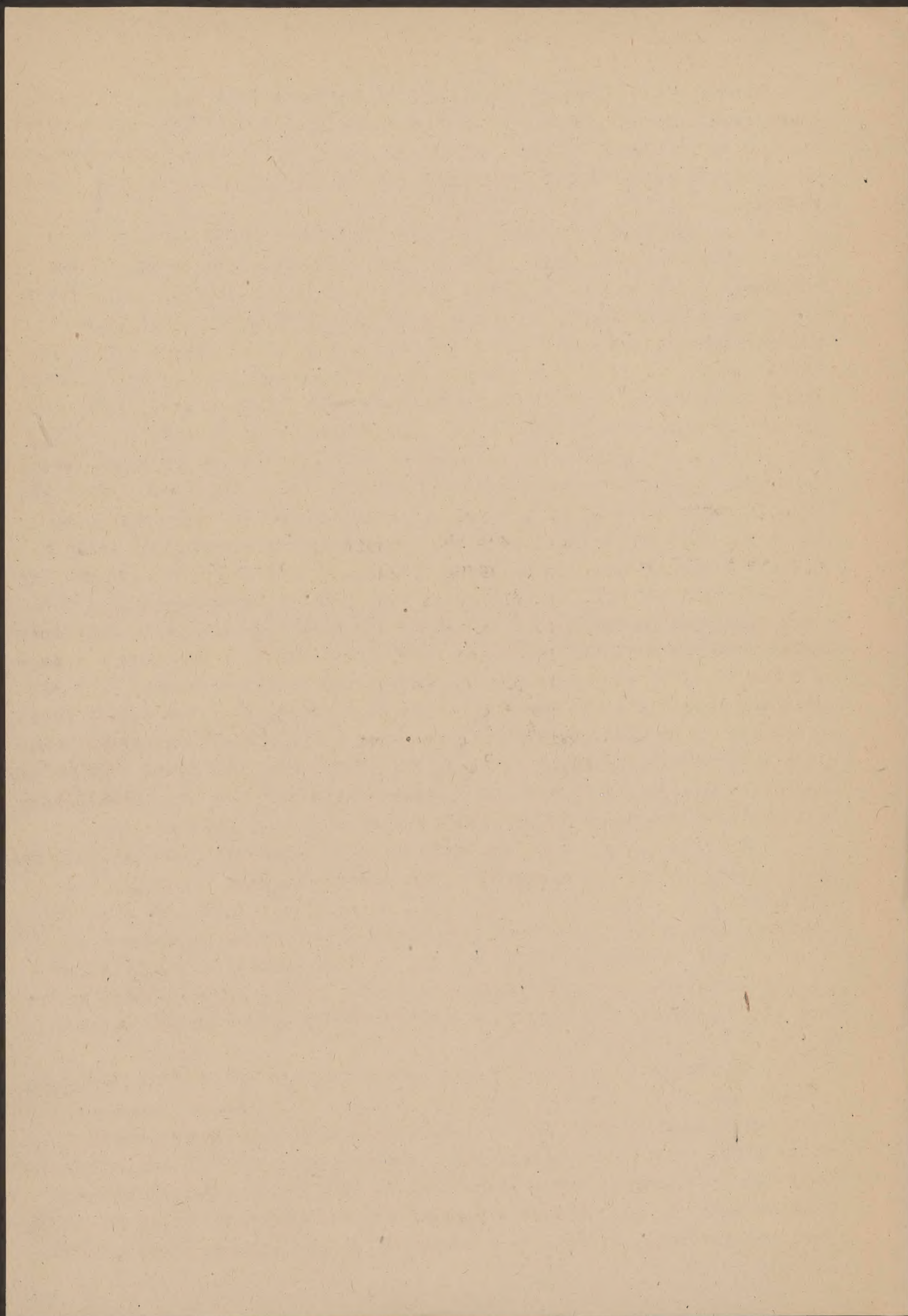
12.

Kreślimy na płaszczyźnie dwie względem siebie prostopadłe osie współrzędnych i dzielimy w ten sposób płaszczyznę na 4 ćwiartki. A teraz - w związku z tym podziałem płaszczyzny - zadajemy sobie pytanie: jakie są możliwe podstawowe rodzaje - kategorie - prostych i punktów na płaszczyźnie? czy i jakie są możliwe punkty i proste znajdujące się: 1/ tylko w jednej z ćwiartek płaszczyzny, 2/ w dwóch, 3/ w trzech, 4/ we wszystkich ćwiartkach płaszczyzny i 5/ po zewnątrz ćwiartek płaszczyzny (elementy "niewłaściwe").

Odpowiedź na te pytania daje nam wszystkie możliwe kategorie punktów i prostych na płaszczyźnie. Widzimy je (z wyjątkiem elementów "niewłaściwych": prostej w nieskończoności i 4 punktów na niej leżących) na poniższym diagramacie, abstrahując tymczasem od znajdujących się tam denominacji algebraicznych.



Diagramat ten przedstawia w ten sposób płaszczyznę geometryczną ze wszystkimi jej elementami, lecz nie płaszczyznę zwykłą, mnogościową, a tylko płaszczyznę geometryczną, kategoryalną, gdzie każdy rodzaj elementów jest przedstawiony przez jeden tylko element, kategorię geometryczną, odmienną jakość geometryczną, np. punkt w pierwszej ćwiartce, prosta równoległa do osi pionowej i na prawo od niej położona itp. Mamy tu więc elementy geometrii na wskroś jakościowej, nie operującej pojęciami wielkości i odległości, lecz interesującej się tylko położeniem, wzgl. kierunkiem elementów - innymi słowy, jesteśmy tu w zasięgu geometrii rzutowej (geometrii położenia). Tylko że u nas te elementy jakościowe sprowadzone są do postaci typów, kategorii - i w ten sposób występują tutaj jako elementy kategoryalnej geometrii położenia.



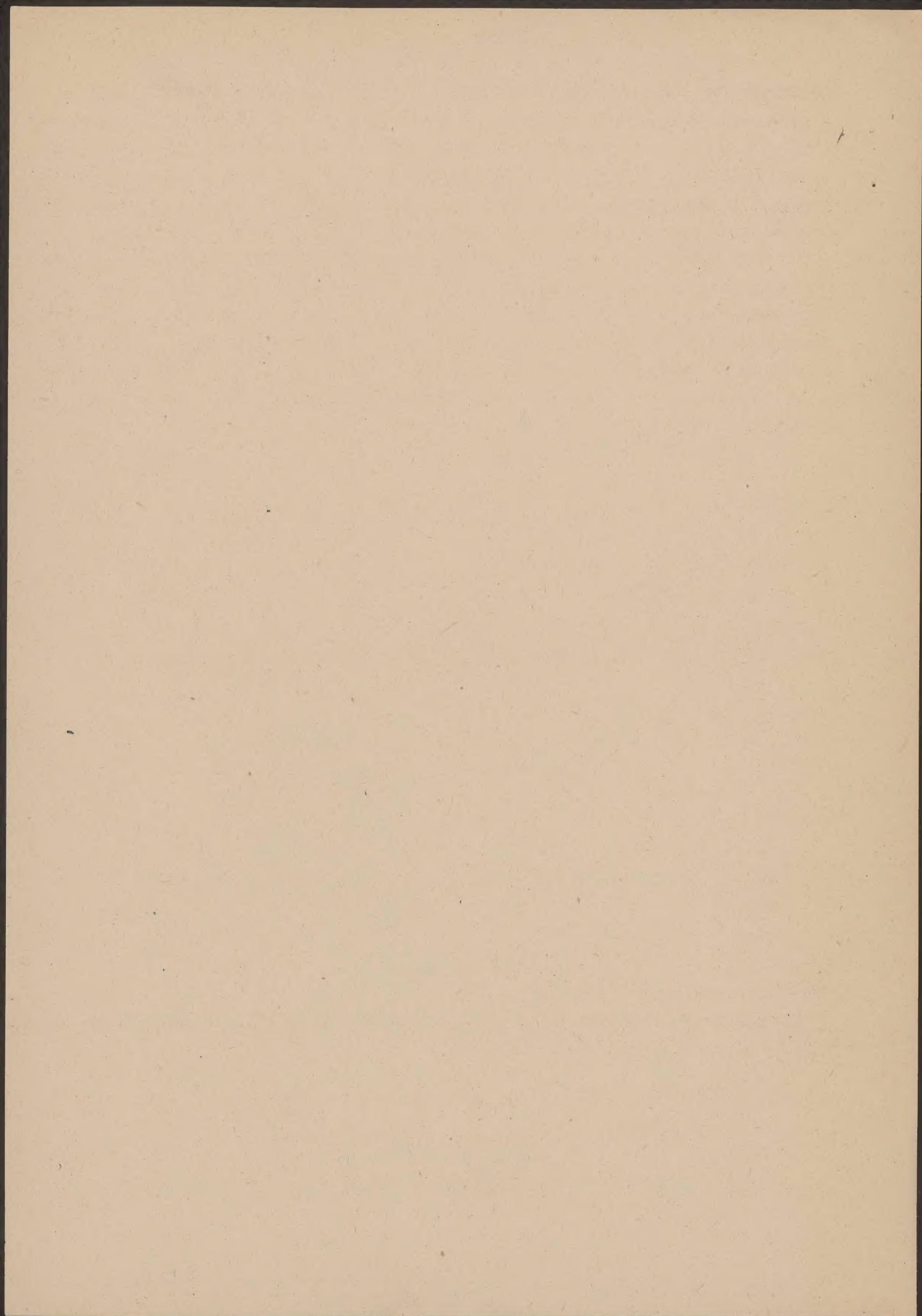
Chodzi teraz o to, czy nie da się tu wprowadzić jakiego rachunku, operującego znakami, jakiego algorytmu, który by pozwolił odkrywać i przedstawiać symbolicznie związki, zachodzące między kategoriami geometrycznymi. Byłby to rachunek kategorialnych punktów (położeń) i prostych (kierunków).

W tej myśli zwracamy się do naszego diagramatu, przedstawiającego system elementów geometrii kategorialnej, tymczasem jeszcze biorąc ten diagramat w jego "nagiej" postaci, bez denominacji algebraicznych. Oznaczmy teraz punkt leżący na prawej połowie osi poziomej przez \underline{a} , punkt przeciwny na tej osi przez $\underline{a'}$ (negacja \underline{a}); punkt leżący na górnej połowie - przez \underline{b} , punkt przeciwny przez $\underline{b'}$ (negacja \underline{b}). Dla oznaczenia dwóch zasadniczych działań geometrii rzutowej: przecinania i rzutowania (łączenia) wprowadzamy znaki $+$ i \times . Połączenie dwóch punktów \underline{a} i \underline{b} daje nam prostą $\underline{a} \times \underline{b}$ czyli \underline{ab} i odpowiednio przecięcie dwóch prostych (względem siebie prostopadłych) \underline{a} i \underline{b} daje punkt $\underline{a} + \underline{b}$. Wobec powyższego linię łączącą punkt \underline{a} z punktem $\underline{a'}$ czyli oś poziomą oznaczad będziemy przez $\underline{aa'}$ i podobnie oś pionową przez $\underline{bb'}$. Te osie współrzędnych, jako momenty wyjścia i odniesienia dla dalszych zróżnicowań elementów płaszczyzny, będą elementami najmniej określonymi, a więc jakościowo minimalnymi, i dlatego oznaczmy je symbolem 0 , tak że $\underline{aa'} = 0$ i $\underline{bb'} = 0$. Jako elementy minimalne będą one modułami dodawania czyli przecinania. Wobec tego $\underline{a} + \underline{aa'} = \underline{a} + 0 = \underline{a}$; widzimy stąd, że prosta prostopadła do osi poziomej (0) i dająca w przecięciu z nią punkt \underline{a} - sama jest prostą \underline{a} . W ten sposób boki zewnętrznego kwadratu okazują się prostymi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a'}, \underline{b'}$ i oznaczenie pozostałych elementów "właściwych" naszego diagramatu oraz elementów "niewłaściwych" nie przedstawia już teraz żadnych trudności^{1/}. Tak oto stworzyliśmy warunki wystarczające dla powstania rachunku geometrycznego.

Weźmy parę przykładów tego rachunku, parę twierdzeń, które zresztą możemy wprost odczytać z diagramatu. Np. widzimy, że łącząc punkt $\underline{a} + \underline{b}$ z punktem $\underline{a} + \underline{b}$ otrzymujemy prostą \underline{a} , a więc że $(\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a}$. Podobnie stwierdzamy, że $\underline{a'} = (\underline{a'} + \underline{b})(\underline{a'} + \underline{b})$. Wiemy już, że $\underline{aa'} = 0$, a więc że $0 = (\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} + \underline{b})(\underline{a'} + \underline{b})(\underline{a'} + \underline{b})$, czyli że zero rozwija się na iloczyn czterech wierzchołków zewnętrznego kwadratu. Tych parę przykładów wystarczy zupełnie, ażeby zorientować się co do natury tego rachunku punktów i

^{1/} Zwracamy tu uwagę na to, że diagramat ten dotyczy tylko przypadku, kiedy $\underline{a} \nless \underline{a'}, \underline{a} \nless \underline{b}, \underline{b} \nless \underline{b'}, \underline{b} \nless \underline{a'}$, przy czym $\underline{a} \nless \underline{b}, \underline{a} \nless \underline{b'}, \underline{b} \nless \underline{a}$ i $\underline{b} \nless \underline{a'}$. (znak \nless oznacza przechodzenie prostej przez punkt). Modyfikacje tego diagramatu, powstałe przez obrót prostych współrzędnych o kąt 90° lub o kąt 45° , będą odpowiadały tym wyłączonej powyżej stosunkom. Ta kategorialna geometria łatwo również daje się przedstawić w postaci trójwymiarowej, w której na miejscu dualnych kwadratów występują: sześciąt i dualny względem niego ośmiościan.

^{1/} (Element geometryczny dualny względem elementu 0 , a więc względem osi współrzędnych lub ich środków, oznaczamy przez 1).



prosty: we wzorach jego odpoznajemy znane nam wzory algebry logiki, twierdzenia dichotomii, określenia zera ($a + 0 = a$), rozwinięcie zera według a i b itp. I ta całkowita równoległość związków algebry logiki ze stosunkami zachodzącymi między kategorialnymi elementami geometrycznymi, których system przedstawia nasz diagramat, może być wykazana systematycznie, poczynając od pewników^{1/} i przechodząc następnie do twierdzeń.

Ten zespół geometrii kategorialnej z jej "charakterystyką", z algebrą logiki stanowić będzie kategorialną geometrię algebraiczną (algebraiczno-logiczną). Mamy tu dokładny odpowiednik geometrii analitycznej Descartes'a z tą różnicą, że gdy geometria analityczna jest geometrią ilościową i mnogościową, to ta geometria jest jakościowa i kategorialna i że odpowiednio do tego zamiast algebry ilościowej mamy tu algebrę jakościową (algebrę logiki).

1948 r.

^{1/} Aksjomatyka geometrii kategorialnej może być ściśle wzorowana na aksjomatyce algebry logiki.

Rlep-9033

2011

